

2022 年度大学院博士前期課程入学試験

大阪大学大学院工学研究科 電気電子情報通信工学専攻

専門科目試験問題 (量子情報エレクトロニクスコース)

(実施時間 14:00 ~ 16:00)

【注 意 事 項】

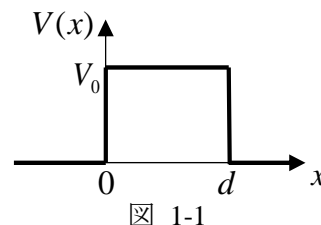
1. 問題用紙は、この表紙や白紙を除いて17ページある。解答開始の指示があるまで開いてはいけない。解答開始後、落丁や不鮮明な箇所等があった場合は、手を挙げて監督者にその旨を伝えること。
2. 試験問題は、「量子電子物性1」、「量子電子物性2」、「量子電子物性3」、「制御工学」、及び、「信号処理」、の全部で5題あり、この順番に綴じられている。このうち、3題を選択し解答すること。
3. 解答開始前に、別紙の「専門科目試験問題選択票」に記載の注意事項も読んでおくこと。
4. 問題用紙は持ち帰ってもよい。

【量子電子物性1】 解答は、桃色(1番)の解答用紙に記入すること.

次の文章を読み、下記の問いに答えよ. ただし、プランク定数 h を 2π で割った値を \hbar , 虚数単位を i とし、 \times はスカラー倍を表すものとする.

図 1-1 および式(1)に示すようなポテンシャル $V(x)$ の一次元空間において (図 1-1), x が負の領域から正の領域へ進んでくるエネルギー ε , 質量 m の粒子について考える. ただし,
 V_0 は正とする.

$$\begin{cases} V(x) = 0 & (\text{領域 1 : } x < 0) \\ V(x) = V_0 & (\text{領域 2 : } 0 \leq x \leq d) \\ V(x) = 0 & (\text{領域 3 : } d < x) \end{cases} \quad (1)$$



(a) $\varepsilon < V_0$ のとき

領域 1~3 における定常状態の波動関数をそれぞれ $\varphi_{1a}(x)$, $\varphi_{2a}(x)$, $\varphi_{3a}(x)$ とすると, これらの波動関数はエネルギー ε を持った粒子の波数 k ($k > 0$), または実数 α ($\alpha > 0$) を使ってそれぞれ次の式で表すことができる.

$$\varphi_{1a}(x) = A \times [\quad \text{①} \quad] + B \times [\quad \text{②} \quad] \quad (2)$$

$$\varphi_{2a}(x) = C \exp(\alpha x) + D \exp(-\alpha x) \quad (3)$$

$$\varphi_{3a}(x) = F \times [\quad \text{①} \quad] \quad (4)$$

ここで A, B, C, D, F は一般に複素定数である. また k ($k > 0$) および α ($\alpha > 0$) の値はシュレーディンガー方程式を解くことにより $k = [\quad \text{③} \quad]$, $\alpha = [\quad \text{④} \quad]$ と求まる.

一方, ある粒子の波動関数を $\Psi(x)$ とするとき, その波動関数の 2 乗 (複素共役を取ったものとの積) に dx をかけた $|\Psi(x)|^2 dx = \Psi^*(x)\Psi(x)dx$ は微小領域 dx においてその粒子を見出す確率を表しており, この $\Psi^*(x)\Psi(x)$ のことを確率密度という. またこのときの確率の流れの密度 $S(\Psi)$ は運動量演算子 \hat{p} を使って次の式で定義される.

$$S(\Psi) = \frac{\Psi^*(x)\hat{p}\Psi(x) + \Psi(x)\hat{p}^*\Psi^*(x)}{2m} \quad (5)$$

運動量演算子は $\hat{p} = [\quad \text{⑤} \quad]$ と記述できるので, x が負の領域からポテンシャル障壁に向かって進んでくる粒子, ポテンシャル障壁で反射される粒子, およびポテンシャル障壁を透過する粒子の波動関数をそれぞれ $\Psi_i(x)$, $\Psi_r(x)$, $\Psi_t(x)$ とすると, これら確率の流れの密度は A, B または F などを用いて次の式で与えられる.

$$S(\Psi_i) = [\quad \text{⑥} \quad], S(\Psi_r) = [\quad \text{⑦} \quad], S(\Psi_t) = [\quad \text{⑧} \quad] \quad (6)$$

この式(6)を用いると, 粒子が領域 2 のポテンシャルの障壁を透過する確率 (透過率) T_a および障壁で反射される確率 (反射率) R_a を次のように求めることができる.

$$T_a = [\quad \textcircled{9} \quad], R_a = [\quad \textcircled{10} \quad] \quad (7)$$

さらに波動関数の境界条件を考慮して、 α , d , ε , V_0 を使って表すと次のようになる。

$$T_a = \left(1 + \frac{V_0^2 \sinh^2(\alpha d)}{4\varepsilon(V_0 - \varepsilon)} \right)^{-1}, R_a = [\quad \textcircled{11} \quad] \quad (8)$$

ここで $\sinh(\alpha d) = \frac{\exp(\alpha d) - \exp(-\alpha d)}{2}$ の関係を用いた。

このように粒子のエネルギー ε がポテンシャル障壁の高さ V_0 より小さい場合、古典力学においては粒子がポテンシャル障壁を透過する確率はゼロであるが、量子力学においてはゼロではなく有限の値をとる。このように粒子が透過する現象をトンネル効果という。またポテンシャル障壁が高く $\alpha d \gg 1$ と近似できる場合には、

$$T_a \cong [\quad \textcircled{12} \quad] \times \exp(-2\alpha d) \quad (9)$$

と表すことができ、この式から_[下線]透過率 T_a の値は d と α に非常に敏感であることがわかる。

(b) $\varepsilon > V_0$ のとき

領域1~3における定常状態の波動関数をそれぞれ $\varphi_{1b}(x)$, $\varphi_{2b}(x)$, $\varphi_{3b}(x)$ とすると、領域2における波動関数は実数 $\beta = [\quad \textcircled{13} \quad]$ ($\beta > 0$) を使って次の式で表すことができる。

$$\varphi_{2b}(x) = C' \exp(i\beta x) + D' \exp(-i\beta x) \quad (10)$$

ただし、 C' , D' は複素定数である。また領域1および領域3におけるそれぞれの波動関数 $\varphi_{1b}(x)$, $\varphi_{3b}(x)$ の関数形は $\varepsilon < V_0$ の場合と同じであることから、 $\varepsilon > V_0$ のときの粒子のポテンシャル障壁の透過率 T_b は m , d , ε , V_0 を使って $T_b = [\quad \textcircled{14} \quad]$ と表すことができる。

この結果は、粒子のエネルギー ε がポテンシャル障壁の高さ V_0 より大きい場合でも T_b は必ずしも1ではないことを示している。また、 T_b が1となるのは ε が自然数 n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を使って次式で表されるときである。

$$\varepsilon = [\quad \textcircled{15} \quad] \quad (11)$$

(c) $\varepsilon = V_0$ のとき

領域2における波動関数は解析的に求めることはできないが、 $\varepsilon = V_0$ のときの透過率 T_c は T_a および T_b の $\varepsilon \rightarrow V_0$ の極限值として求めることができる。このときの極限值は両者で同じ値となり、 T_c は次の式で与えられる。

$$T_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow V_0} T_a = \lim_{\varepsilon \rightarrow V_0} T_b = [\quad \textcircled{16} \quad] \quad (12)$$

問1 文章中の空欄 [$\textcircled{1}$] ~ [$\textcircled{16}$] の中に適切な数式を入れよ。

問2 式(9)の 2α の逆数は減衰長とよばれる。 $V_0 = 2.0 \text{ eV}$, $\varepsilon = 1.2 \text{ eV}$ のとき, この減衰長を単位も含めて有効数字2桁で求めよ。ただし, $\hbar = 1.1 \times 10^{-34} \text{ Js}$, $m = 9.0 \times 10^{-31} \text{ kg}$, 素電荷 $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ とする。

問3 文章中の下線部において α が 10 nm^{-1} の場合, d が 0.10 nm 増加したときの透過率は元の透過率の何%になるか。有効数字2桁で求めよ。なお, 自然対数の底を 2.7 とし, $(2.7)^2=7.3$ とする。

量子電子物性1 単語の英訳

| | |
|----------------|-----------------------------|
| プランク定数 : | Planck constant |
| ポテンシャル : | potential |
| 波動関数 : | wave function |
| 波数 : | wave number |
| 複素定数 : | complex constant |
| シュレーディンガー方程式 : | Schrödinger equation |
| 複素共役 : | complex conjugate |
| 確率の流れの密度 : | probability current density |
| 運動量演算子 : | momentum operator |
| 障壁 : | barrier |
| 透過率 : | transmittance |
| 反射率 : | reflectance |
| 古典力学 : | classical mechanics |
| 有限の値 : | finite value |
| トンネル効果 : | tunneling effect |
| 極限值 : | limit value |
| 減衰長 : | attenuation length |
| 素電荷 : | elementary charge |

【量子電子物性2】 解答は、緑色(2番)の解答用紙に記入すること。

半導体に関する次の文章を読み、下記の問いに答えよ。ただし、素電荷を $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ とし、 \times はスカラー倍を表すものとする。

図 2-1 に示すような厚さ d 、幅 w 、長さ l の直方体形状の[下線1]不純物をドーピングした半導体結晶試料 A を考える。この試料のキャリアは伝導電子（以下、電子）のみで、電子密度 n で一様に分布しているものとする。電圧 V （ただし $V > 0$ ）によって弱い電界 \mathbf{E} がこの半導体中に作用している場合、結晶中の電子は電界による力 $\mathbf{F} = [\quad \textcircled{1} \quad]$ を受けて

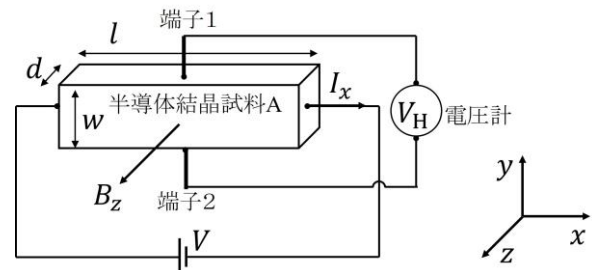


図 2-1

加速される。しかし、[下線2]加速された電子は種々の散乱体と衝突して運動量を失い、定常状態では平均速度 \mathbf{v} で運動していると見なすことができる。この運動は[$\textcircled{7}$]運動とよばれる。電子の有効質量を m^* 、衝突の緩和時間を τ とすると、 \mathbf{v} は m^* 、 τ を用いて $\mathbf{v} = [\quad \textcircled{2} \quad] \times \mathbf{E}$ と表される。この[$\textcircled{2}$]の絶対値は[$\textcircled{7}$]移動度 μ とよばれる。

いま、試料にかかる電界 $\mathbf{E} = (E_x, 0, 0)$ により電子は平均速度 $\mathbf{v} = (v_x, 0, 0)$ で移動し、電流 $\mathbf{I} = (I_x, 0, 0)$ が流れるとする。この I_x は v_x を用いて、 $I_x = [\quad \textcircled{3} \quad] \times v_x$ と表される。ここから試料の導電率 σ は μ を用いて $\sigma = [\quad \textcircled{4} \quad]$ と導かれる。

次に、この電流が流れている状態で試料の $+z$ 方向に磁束密度 $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$ （ただし $B_z > 0$ ）の磁界を印加する。[$\textcircled{7}$]運動する電子は磁界から[$\textcircled{1}$]力を受けた結果、試料の[$\textcircled{7}$ $(+y \cdot -y)$]側に偏って分布し、逆側にはイオン化した[\oplus (ドナー・アクセプタ)]が残される。この結果、 y 軸に沿った電界成分が生じ、この電界によって試料の端子 1-2 間には起電力 V_H （ただし、端子 2 の電位を基準とする）が発生する。この効果はホール効果とよばれ、[下線3]半導体の物性評価手段として、また[下線4]センサを始めとする様々な電子素子において重要である。定常状態では[$\textcircled{1}$]力と y 方向の電界成分による力が釣りあうので、導電率 σ は磁界を印加しない場合と等しくなる。このとき V_H は B_z と I_x の関数として $V_H = [\quad \textcircled{5} \quad] \times B_z I_x$ と表される。また、[$\textcircled{5}$]に試料厚さ d を掛けたものはホール係数 R_H とよばれ、 σ に R_H の絶対値を掛けたものはホール移動度 μ_H とよばれる。キャリアの速度分布を考慮して解析すると、通常、このホール移動度は[$\textcircled{7}$]移動度 μ よりも[$\textcircled{7}$ (大きく・小さく)]なることが知られている。

問1 文章中の空欄 [㉞] ~ [㉟] にあてはまる語句を答えよ。
 ただし空欄 [㊸] [㊹] [㊺] には適切な語句を一つ選ぶこと。

問2 文章中の空欄 [①] ~ [⑤] にあてはまる数式を答えよ。

問3 文章中の下線 1 について、半導体結晶試料 A が Ge や Si のような 14 族元素半導体である場合、伝導電子を供給する不純物として適切な元素を以下の選択肢からすべて選べ。

[B, As, P, C]

問4 文章中の下線 2 の電子の散乱について考える。図 2-2 中の曲線 a は比較的高濃度のドーパントを含む n 型半導体における電子移動度 μ の温度依存性の概形を示したものである。絶対温度を T とするとき、 μ は低温領域において $T^{3/2}$ 、高温領域において $T^{-3/2}$ に比例して変化した。このとき、低温領域、高温領域それぞれにおける支配的な散乱機構が何であるかを説明せよ。また、図 2-2 を曲線 a も含めて解答用紙に転記し、同種の半導体でドーパント濃度が曲線 a で示す試料に比べて十分に低い場合の電子移動度の温度依存性の概形を曲線 a との相対的な位置関係を明確にして描け。

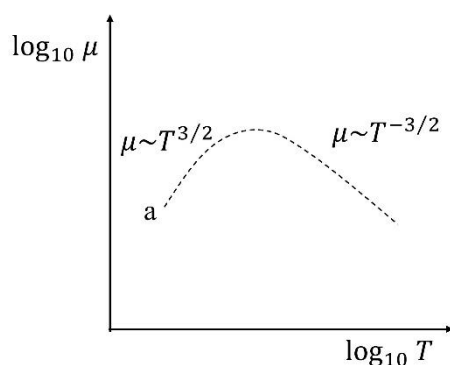


図 2-2

問5 文章中の下線 3 について、一般的にはホール効果測定により不純物半導体の主たるキャリアの種類が電子か正孔かを判別することができる。キャリア種が電子の場合、正孔の場合それぞれについてどのように判別するか具体的に答えよ。

問6 文章中の下線 4 について、ホール効果を利用して磁界を計測するセンサとしてホール素子がある。以下の問いに答えよ。

(i) 電子密度 $n = 1 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$ 、 $d = 0.1 \text{ mm}$ 、 $w = 0.5 \text{ mm}$ 、 $l = 2 \text{ mm}$ の半導体結晶試料 A に電流 $I_x = 1 \text{ mA}$ を流した場合、図 2-1 の配置で z 方向にある磁束密度の磁界を印加しながら起電力

V_H を計測すると $V_H = -1.25 \text{ mV}$ であった。このときの磁束密度の大きさを有効数字1桁で単位も含めて解答せよ。導出過程も示すこと。

- (ii) ホール素子を定電圧駆動させる場合、表 2-1 に挙げた3つの半導体の中から、ホール素子材料としての最も磁界感度が高くなるものを選択しその理由とともに答えよ。

表 2-1

| 半導体 | 電子移動度 ($\text{cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$) | バンドギャップ (eV) |
|------|--|-----------------|
| Si | 1450 | 1.12 |
| GaAs | 9200 | 1.42 |
| InSb | 77000 | 0.17 |

量子電子物性2 単語の英訳

| | |
|---------|------------------------|
| 半導体 : | semiconductor |
| 直方体 : | rectangular |
| 不純物 : | impurity |
| ドーピング : | doping |
| キャリア : | carrier |
| 伝導電子 : | conduction electron |
| 電子密度 : | electron density |
| 電界 : | electric field |
| 散乱体 : | scatterer |
| 運動量 : | momentum |
| 定常状態 : | steady state |
| 有効質量 : | effective mass |
| 緩和時間 : | relaxation time |
| 移動度 : | mobility |
| 導電率 : | conductivity |
| 磁束密度 : | magnetic flux density |
| 磁界 : | magnetic field |
| 起電力 : | electromotive force |
| ホール効果 : | Hall effect |
| ドーパント : | dopant |
| 散乱機構 : | scattering mechanism |
| ホール素子 : | Hall element |
| 定電圧駆動 : | constant-voltage drive |
| 感度 : | sensitivity |

【量子電子物性3】 解答は、灰色(3番)の解答用紙に記入すること.

物質の誘電的性質に関する下記の問いに答えよ. ただし, 素電荷を e , 真空の誘電率を ϵ_0 , プランク定数を 2π で割ったものを \hbar , 虚数単位を i , 時間を t とし, x はスカラー倍を表すものとする.

媒質に外部から電界を印加すると, 電子や原子の変位, あるいは永久双極子モーメントをもつ分子の再配向に伴った分極が生じる. 電子分極の性質を考える簡単なモデルとして, まず $+e$ の正電荷をもった原子核のまわりに $-e$ の負電荷をもつ電子が雲のように分布して存在し, 電界による電子の1次元的な変位によって分極が誘起される系を考える. 以下では振幅 E_0 , 角周波数 ω の交流電界 $E = E_0 \exp(-i\omega t)$ が媒質の x 方向に一樣に印加されるものとし, 簡単のため, 電子に作用する局所電界と外部電界は等しいものとする.

電界によって電子の中心が元の位置から x だけ変位するとき, 電子は復元力 $-k_e x$ に加え, 制動力 $-\gamma \times dx/dt$ を感じる. 電子の質量を m として $k_e = m\omega_0^2$, $\gamma = m\Gamma$ とおき, 電界に対する電子の変位方向に注意すると, 以下の運動方程式が得られる.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\Gamma \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = -eE_0 \exp(-i\omega t) \quad (1)$$

式(1)の解として $x = x_0 \exp(-i\omega t)$ の応答を仮定すると, 振幅 x_0 が次のように求まる.

$$x_0 = - [\quad \textcircled{1} \quad] - i [\quad \textcircled{2} \quad] \quad (2)$$

電子分極率 α_e は電子の変位が誘起する双極子モーメントの大きさを表す. 式(2)の与える α_e は次のようになる.

$$\alpha_e = [\quad \textcircled{3} \quad] + i [\quad \textcircled{4} \quad] \quad (3)$$

電子の密度を n とすると, 生じる分極 P は α_e を用いて $P = [\quad \textcircled{5} \quad]$ と表される.

続いて, 上と同様の議論を原子核(ポテンシャル)の影響を受けない自由電子に適用することで, 伝導電子の応答が支配的な金属や高ドープ半導体の誘電応答をモデル化する. 以下では単一の自由電子を考えるが, これまでと同じく電子の質量, 変位, 分極率, 媒質中の密度はそれぞれ m , x , α_e , n で表し, 印加される交流電界は $E = E_0 \exp(-i\omega t)$ で表わすものとする. 自由電子に対しては復元力は働かず, 制動力に関するパラメータ Γ は自由電子の緩和時間 τ を使って $\Gamma = 1/\tau$ と表せる. このことから, 自由電子の従う運動方程式は τ を使って次式で与えられる.

$$[\quad \textcircled{6} \quad] = -eE_0 \exp(-i\omega t) \quad (4)$$

式(4)の解として $x = x_0 \exp(-i\omega t)$ の応答を仮定すると, 変位の振幅および分極率は次のように求まる.

$$x_0 = [\quad \textcircled{7} \quad] - i [\quad \textcircled{8} \quad] \quad (5)$$

$$\alpha_e = - [\quad \textcircled{9} \quad] + i [\quad \textcircled{10} \quad] \quad (6)$$

次に, 分極応答から比誘電率 $\epsilon_r(\omega)$ を求めることを考える. いま検討している系では, 電束密度 D と分

極 P の間には $D = [\quad \text{⑪} \quad]$ の関係が成り立つ。また、比誘電率の定義から $D = \epsilon_0 \epsilon_r E$ であることを考慮すると、 $\epsilon_r(\omega)$ が次のように求まる。

$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{1}{1 + i \frac{1}{\omega\tau}} \quad (7)$$

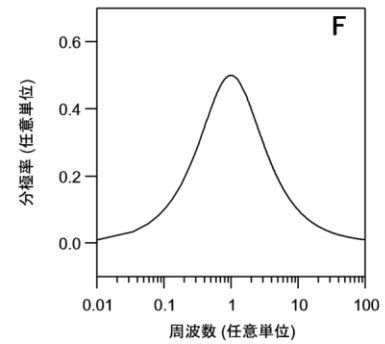
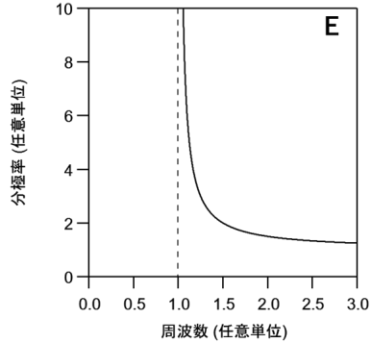
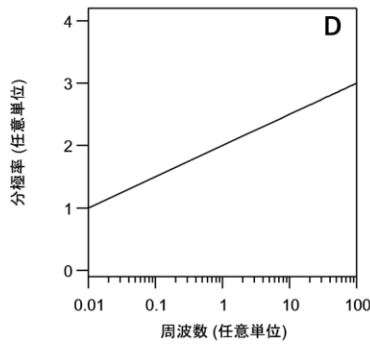
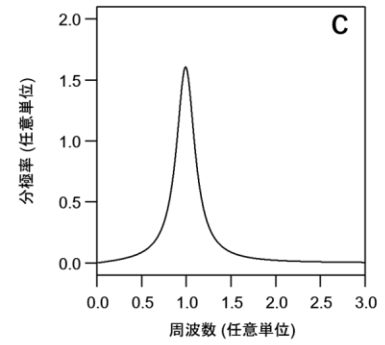
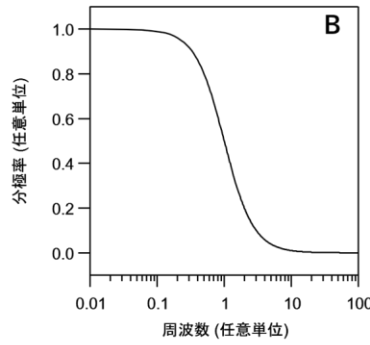
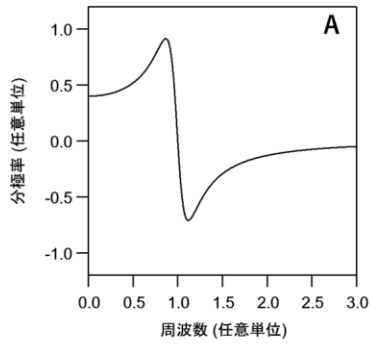
式(7)の ω_p はプラズマ周波数と呼ばれ、自由電子の性質を決める重要なパラメータである。特に、 $\omega\tau \gg 1$ が成り立つような電界（通常、電磁波として存在）が媒質に入射した場合には、 $\omega < \omega_p$ において $\epsilon_r(\omega)$ の実部と虚部の値がそれぞれ [$\quad \text{⑫} \quad$ (正・負)] および [$\quad \text{⑬} \quad$ (正・負)] となる。この効果によって銀、アルミニウムなどの金属は可視光を反射する。

問1 文章中の空欄 [$\quad \text{①} \quad$] ~ [$\quad \text{⑪} \quad$] にあてはまる数式を答えよ。なお、
[$\quad \text{⑥} \quad$] ~ [$\quad \text{⑩} \quad$] は τ を使うこととする。また、[$\quad \text{⑫} \quad$] および
[$\quad \text{⑬} \quad$] は適切な語句を選ぶこと。

問2 誘電体の分極応答について下記の問いに答えよ。

(i) 実際の誘電体では外部電界と局所電界の大きさは異なる。立方晶の単結晶において、局所電界に寄与する電界の成分を2つ、それぞれ50字以内で説明し、それぞれの成分が局所電界を大きくするように働くか、小さくするように働くか答えよ。

(ii) 本文で論じた電子分極以外の分極機構にイオン分極および配向分極がある。これら2つの機構に基づく分極率の実部と虚部のそれぞれ（合計4成分）について、周波数依存性の概形を正しく表しているものを以下の図より選び、記号で答えよ。なお、グラフの破線は漸近線を表す。



問3 自由電子の誘電応答について下記の問いに答えよ.

(i) ω_p を m , e , n , ϵ_0 を用いて数式で表せ.

(ii) 表示素子や太陽電池などのデバイスでは導電性をもちながら可視光を透過する透明導電体を用いられている. これらは ω_p の値を調節することで実現されるが, 本文で論じたモデルによれば, 無色かつ透明な導電体を実現できるものは以下の4つのうちどれか, 該当するものをすべて答えよ.

(ア) $\hbar\omega_p = 10.0 \text{ eV}$ (イ) $\hbar\omega_p = 5.0 \text{ eV}$ (ウ) $\hbar\omega_p = 1.0 \text{ eV}$ (エ) $\hbar\omega_p = 0.5 \text{ eV}$

量子電子物性3 単語の英訳

| | |
|-------------|----------------------------|
| 誘電的性質： | dielectric properties |
| 素電荷: | elementary charge |
| 誘電率： | permittivity |
| 永久双極子モーメント： | permanent dipole moment |
| 分極： | polarization |
| 局所電界： | local electric field |
| 復元力： | restoration force |
| 制動力： | damping force |
| 自由電子： | free electron |
| 緩和時間： | relaxation time |
| 電束密度： | electrical flux density |
| プラズマ周波数： | plasma frequency |
| 立方晶の結晶： | cubic crystal |
| 配向分極： | orientational polarization |
| 周波数依存性： | frequency dependence |
| 透明導電体： | transparent conductor |

【制御工学】解答は、白色（４番）の解答用紙に記入すること。

以下の問 1～問 3 に答えよ。

問 1 伝達関数 $P(s)$ が次式で表される線形時不変システム Σ について、以下の問いに答えよ。

$$P(s) = \frac{10}{(s+1)^2}$$

- (i) このシステム Σ のステップ応答を時間 t の関数 ($t \geq 0$) として表せ。
- (ii) $P(s)$ のボード線図におけるゲイン曲線の折れ線近似を考える。この折れ線近似において、ゲインのデシベル値が -60 dB となるときの角周波数の値を求めよ。
- (iii) このシステム Σ に $\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)$ ($t \geq 0$) なる正弦波関数の入力を加えたとき、定常状態での出力は $Y \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}t + \phi\right)$ と表される正弦波関数となった。 Y および ϕ の値をそれぞれ求めよ。
- (iv) このシステム Σ に対して図 1 のようなフィードバックシステムを構成した。ただし、 $R(s)$ 、 $C(s)$ はそれぞれ時間 t の関数 $r(t)$ 、 $c(t)$ ($t \geq 0$) のラプラス変換を表し、 k は正の実数値をとるパラメータである。 $R(s)$ から $C(s)$ までのフィードバックシステムが安定となるための k に関する必要十分条件を求めよ。

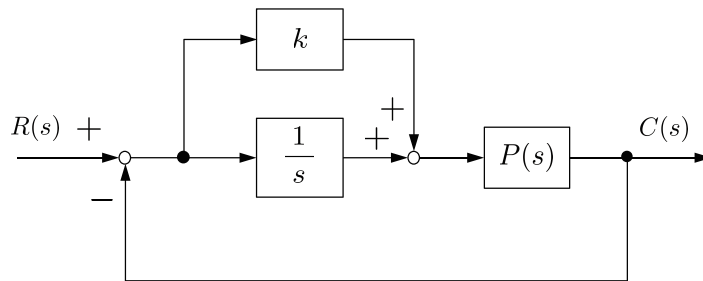


図 1

問2 次の状態方程式と出力方程式で表現される1入力1出力の線形時不変システムについて、以下の問いに答えよ。

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

ここで、 $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ は状態変数ベクトル、 $u(t)$ は入力変数、 $y(t)$ は出力変数である。

(i) 係数行列

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

に対する行列指数関数 $e^{\mathbf{A}t}$ を求めよ。

(ii) 入力 $u(t) = e^{-2t}$ ($t \geq 0$) を加えたときの出力 $y(t)$ ($t \geq 0$) を t の関数として求めよ。ただし、時刻 $t = 0$ での初期状態を $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ とする。

(iii) k を任意の実数とする。 $u(t) = -ky(t)$ ($t \geq 0$) なる出力フィードバック制御を施したフィードバックシステムの漸近安定性を判定せよ。ただし、その判定理由も述べること。

問3 次の状態方程式と出力方程式で表現される1入力1出力の線形時不変システムを考える。

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

ここで、 $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ は状態変数ベクトル、 $u(t)$ は入力変数、 $y(t)$ は出力変数である。 $\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}$ とし、

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{z}(t)$$

とおくとき、 $\mathbf{z}(t)$ を新たな状態変数ベクトルとした状態方程式

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z}(t) + \tilde{\mathbf{b}}u(t)$$

と出力方程式

$$y(t) = \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{z}(t)$$

における係数行列 $\tilde{\mathbf{A}}$ と係数ベクトル $\tilde{\mathbf{b}}$ 、 $\tilde{\mathbf{c}}$ を求めよ。

専門用語の英訳

| | |
|-------------|------------------------------------|
| 伝達関数 | transfer function |
| 線形時不変システム | linear time-invariant system |
| ステップ応答 | step response |
| ボード線図 | Bode diagram |
| ゲイン曲線 | log-magnitude curve |
| 折れ線近似 | piecewise linear approximation |
| ゲイン | gain |
| デシベル値 | decibel value |
| 角周波数 | angular frequency |
| 正弦波関数 | sinusoidal function |
| 入力 | input |
| 定常状態 | steady state |
| 出力 | output |
| フィードバックシステム | feedback system |
| ラプラス変換 | Laplace transform |
| 安定 | stable |
| 必要十分条件 | necessary and sufficient condition |
| 状態方程式 | state equation |
| 出力方程式 | output equation |
| 状態変数ベクトル | state variable vector |
| 入力変数 | input variable |
| 出力変数 | output variable |
| 係数行列 | coefficient matrix |
| 行列指数関数 | matrix exponential function |
| 出力フィードバック制御 | output feedback control |
| 漸近安定性 | asymptotic stability |
| 係数ベクトル | coefficient vector |

【信号処理】 解答は、だいたい色の解答用紙に記入すること。

1. 連続時間信号

$$x(t) = \frac{2}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} p(t - mT) \quad \text{ただし} \quad p(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t < T) \\ 0 & (t < 0 \text{ または } T \leq t) \end{cases}$$

について、以下の問いに答えよ。ただし、 t は連続的な時刻を表す実数であり、 m は任意の整数である。また、 T は t , m に依存しない定数であり、正の実数とする。

(i) $x(t)$ が周期信号であることを示し、その基本周期を求めよ。

(ii) $x(t)$ を図示せよ。

(iii) $x(t)$ をフーリエ級数に展開せよ。ただし、 a, b, c を定数とする次の関係式

$$\int_a^b c^2 t e^{ct} dt = \left[(ct - 1) e^{ct} \right]_a^b$$

を利用して良い。

(iv) エイリアシングを生じないように $x(t)$ をサンプリングしたい。それが可能であるならばサンプリング周波数をどのように設定すればよいかを、不可能であるならばその理由を、問い (iii) の結果に基づいて論ぜよ。

2. 入出力差分方程式

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{6}y[n-2] + \frac{1}{3}y[n-4] - x[n-5]$$

で表される因果的な離散時間信号処理システム L について、以下の問いに答えよ。ただし、 n は離散的な時刻を表す整数であり、 $x[n]$, $y[n]$ はそれぞれ L に対する入力信号、出力信号を表す。

(i) z 変換により定義される L の伝達関数を $H(z)$ とする。 $H(z)$ を求めよ。

(ii) 問い (i) の $H(z)$ について、その極と零点を求め、図示せよ。

(iii) L の有界入力有界出力安定性を論ぜよ。

(iv) L への入力 $x[n] = \cos(\Omega_0 n)$ に対し、出力が任意の n について $y[n] = 0$ となるような Ω_0 を全て求めよ。ただし、 Ω_0 は n に依存しない定数であり、 $0 \leq \Omega_0 < \pi$ を満たす。

専門用語の英訳

| | |
|--------------|--|
| 連続時間信号 | continuous-time signal |
| 周期信号 | periodic signal |
| 基本周期 | fundamental period |
| フーリエ級数 | Fourier series |
| エイリアシング | aliasing |
| サンプリング | sampling |
| サンプリング周波数 | sampling frequency |
| 入出力差分方程式 | input-output difference equation |
| 因果的 | causal |
| 離散時間信号処理システム | discrete-time signal processing system |
| 入力信号 | input signal |
| 出力信号 | output signal |
| z 変換 | z transform |
| 伝達関数 | transfer function |
| 極 | pole |
| 零点 | zero |
| 有界入力有界出力安定性 | bounded-input bounded-output stability |
